

중학수학 처음부터 이렇게 배웠더라면
박병하 - 행성비 -

1장 자연수, 수학이 탄생하다.

- 자리수 정하기 : 한자리는 단단위, 두자리는 십단위, 세자리는 백단위
- 기호 10개와 자릿수로 수를 나타내는 방법을 십진법이라고 한다. 국제 공용어다. 어떤 영웅도 세계를 재패하지 못했지만, 십진법은 그것을 해냈다.
- 십진법에서 ‘빈자리’를 나타내는 기호가 0이다. 수라고 말하는 것도 조금 이상하지만 수를 아니라고 말하자니 그것도 찝찝하다.
- 0이 수라면 무엇을 뜻할 까? 때때로 0 은 아무것도 없음을 나타낸다. 때때로 그렇다는 것이지 항상 그렇다고 생각하면 큰코 다친다.

0으로 나누면 안된다.

$2^3 = 2*2*2 = 8$ 이다. 하지만 $2^0 = 2*? = 1$ 이라고 정의한다.

$3! = 3*2*1 = 6$ 이다. 하지만 $0! = 0*? = 1$ 이라고 정의한다.

- 0이 무엇인지 알려면 0이 어떻게 행동하는지 경험해보아야 한다.

2장 이것이 덧셈과 곱셈이다.

- 아이들에게 $3+5$ 를 물으면 $=8$ 이라고 빠르게 답한다. 하지만 $5+3$ 을 물으면 손가락으로 계산을 하기 시작한다.
- 원숭이에게 아침에 바나나 3개를 주고 오후에 4개를 주면 싫어한다고 한다. 하지만, 아침에 4개를 주고 오후에 3개를 주면 좋아한다고 한다. - 조삼모사 朝三暮四

원숭이에게

아침3개 + 저녁4개 $\neq$ 아침4개 + 저녁3개

- 덧셈을 거듭하는 셈을 곱셈이라 하고, 곱셈을 거듭하는 셈을 거듭제곱셈이라 한다. 거듭제곱셈의 계산에는 다음과 같다.

$$2^3 * 2^5 = (2*2*2)*(2*2*2*2*2) = 2*2*2*2*2*2*2*2 = 2^3 + 2^5 = 2^8$$

$$(2*3)^5 = (2*3)*(2*3)*(2*3)*(2*3)*(2*3) = 2*2*2*2*2*3*3*3*3*3 = 2^5 + 3^5$$

- 결과를 보면 어려운 셈이 더 쉬운 셈으로 바뀌는 것이 보이는가 ?

- 0과 1의 덧셈, 곱셈, 거듭제곱

- 덧셈, 곱셈, 거듭제곱에서 0이 어떻게 행동하는지 살펴보자.

0은 덧셈에서 그리고 1은 곱셈에서 아무 힘을 쓰지 못한다. 있으나 마나한 결과이다. 이렇게 연산을 해도 값을 변하지 않게 하는 것을 그 연산에 대한 항등원이라고 한다. 덧셈에서의 항등원은 0이고, 곱셈에서의 항등원은 1이다.

0은 덧셈과 있으면 더없이 겸손한 수다. 그런데 곱셈과 만나면 얼굴을 싹 바꾼다. 곱셈과 있으면 0은 모든 자연수를 흡수해버린다.

$$x*0 = 0*x = 0$$

거듭제곱의 경우에는

$$x^0 = 1 \quad x \neq 0 \text{ 이 아닐 때}$$

- 왜 그럴까 그게 가장 좋기 때문이다.

3^4	3^3	3^2	3^1	3^0	지수가 1씩 감소
81	27	9	3	?	결과가 1/3로 감소

- 어떤 수와 곱셈하든 결과를 0으로 만들어 버리는 행동을 하는 수가 바로 0이다. 그것이 곱셈이라고 생각하자.

3장 이것이 뺄셈과 나눗셈이다.

- 뺄셈은 거꾸로 덧셈

빼내기라고만 여기면 뺄셈이 섭섭해진다. 뺄셈은 “빼기”를 설명할 수 있지만 그것보다 넓고 깊은 뜻을 지닌다. ‘거꾸로’라는 뜻을 가지는 것이다

$$3 - 2 = x$$

을 계산하지 말고

$$2 + x = 3 \quad (\text{거꾸로 범인 } x \text{를 역추적해가는 과정처럼})$$

의 개념으로 이해하자.

- 나눗셈은 거꾸로 곱셈이다. 하지만 운이 아주 좋아야 한다.

$$18 \div 3 = 6$$

와 같이 계산이 쉽게 되기도 하지만

$$18 \div 4 = ? \text{ 자연수가 아닌 수가 될 수 도 있음}$$

- 인수

18을 나누는 수는 1,2,3,6,9,18이다. 이렇게 어떤 수 a 를 나누는 수를 일컬어 약수(divisor), 인수(factor) 라고 한다.

- 소인수분해

그렇다면 그게 다인가 더는 없다는 것을 어떻게 확인할 것인가 ? 이것을 푸는 열쇠가 소인수분해이다.

소수란 무엇인가? 1이 아닌 그 자신과 1로만 나뉘는 수를 소수(prime number)라 한다.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$$

와 같은 수이다.

- 주어진 수가 소수인지 알아내는 방법은?

- 자연수 전체에 소수는 얼마나 될까? 이러한 주제는 너무 무거운 주제이다.(참조 리만가설)

- 어떤 자연수를 소수들의 곱으로 쪼개 놓는 것은 인수로 분해하다. 또는 소인수분해(prime factorization) 라고 한다.

- 자연수 세계에서 가장 기초가 되는 정리(fundamental theorem of arithmetic)

어떠한 자연수를 소인수 분해하는 방법이 하나밖에 없다는 사실은 매우 다행이라 할 수 있다.

- 인수 모두 찾기

6을 인수분해 하면 1, 2, 3, 6 이다. 소수의 곱으로 표기하면

$$6 = 2^1 \times 3^1$$

이 된다. 여기서 $2^0 = 1$ 도 인수가 되고 $3^0 = 1$ 도 인수가 된다. 그러므로 총 인수의 개수는

소수의 지수를 이용한 $(1+1) \times (1+1) = 4$ 으로 계산된다.

- 120을 소인수분해해서 거듭제곱형태로 표기하면

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

이다. 총 인수의 갯수는 $(3+1) \times (1+1) \times (1+1) = 16$ 이 된다.

$$120 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120$$

- 어떤 수가 소수인지 아닌지 알아내기는 매우 어렵다. 수학에서 가장 복잡한 문제로 꼽힌다.

4장 마이너스 곱하기 마이너스는 플러스 ?

- $6 \div -2$ 빵 -6개를 -2명에게 나누어주기 말도 안 되는 소리이다.

- 2×-3 유령 2명이 유령 빵 3개를 가져오면 식탁에 진짜 빵 6개가 있다.

- 음수란 무엇인가

자연수만큼의 크기를 가지지만, 반대방향을 나타내는 수들을 ‘음의 정수(negative integer)’ 라고 부른다.

- 음수와 음수의 곱셈

분배법칙이 통한다고 믿으면 두 결과는 같아야 한다.

$$-2 \times (3 + (-3)) = (-2) \times 3 + (-2) \times (-3)$$

$$-2 \times 0 = -6 + (-2) \times (-3)$$

$$6 = (-2) \times (-3)$$

5장 변수는 수일까

- 변수 개념은 자칫 뜬 구름처럼 느껴져서 잘 잡히지 않는다. 말 그대로 하면 ‘변할 수 있는 것’ 이다.

- 변수(variable)는 변할 수 있는 것을 말한다. 무엇이든 된다.

- 비교되는 개념이 상수(constant) 이다. 상수는 ‘고정된 것’이라는 뜻이다.

- 정수, 유리수, 무리수, 실수 이름이 무엇이든 이것들은 모두 상수이다.

- 모든 상수와 변수를 다 통합하는 것이 ‘항(term)’ 이다.

- 다항 : 변수와 상수를 덧셈, 뺄셈, 곱셈 세 연산으로 ‘유한번’ 결합해서 나타낸 것
- 단항 : 다항중에 덧셈과 뺄셈이 참여하지 않은 것
- 차수 : 변수하나의 차수가 1차이다. 변수를 한번 곱할 때 마다 차수가 하나씩 올라간다.

- 계수 : 변수에 영향을 주는 정도를 말한다.
- 다항의 차수 : 다항을 곱셈한 결과, 참여한 단항 중에서 가장 높은 차수를 다항의 차수라 한다.
- 동류항 : 같은 문자로 이루어져 있고 차수가 같은 단항들을 동류항이라 한다.

- 수학의 생명은 한 치의 오차도 없는 정확성이다. 그것은 정의와 증명과 계산에서 나타난다.

- 항이 같음에 대한 정의
두개의 항을 놓고 같으냐 다르냐를 말하기는 쉽지 않다. 변수라는 개념이 있기 때문이다. 두 항을 비교하는 것을 정의하면 다음과 같다.

정의 1 : 변수에 상수를 넣을 때마나 결과가 ‘항상’ 같으면 ‘두 항이 같다’고 한다.

정의 2 : 두 다항이 동류항들로만 이루어질 수 있고 그 때 계수도 같으면 ‘두 다항은 같다’고 말한다.

정의 1과 2는 절대로 충돌하지 않는다.

- 항의 덧셈과 뺄셈
항이라는 거대한 개념이 변수까지 통합하면서 수학은 훨씬 더 강력해질 기미를 보이고 있다.

변수는 상수를 대신한다. 따라서 정수가 적용된다면 정수까지 통하는 법칙들도 동일하게 통할 것이다.

$(x+y)(x-y)$	
$= (x+y)(x+(-y))$	음수 성질
$= (x+y)x + (x+y)(-y)$	분배법칙
$= x^2 + yx + x(-y) + y(-y)$	분배법칙
$= x^2 + xy + (-1)xy + (-1)y^2$	교환법칙, 음수성질
$= x^2 + (1+(-1))xy + (-1)y^2$	분배법칙
$= x^2 - y^2$	

6장 Be Rational, Be Happy (수학적이 되라, 행복해진다)

- 유리수, 분수꼴 표현, 소수점꼴 표현, 유리수의 덧셈과 곱셈

예) 빵 4개를 사람 5명에게 나누어 주는 효과적인 방법은 4개의 빵을 모두 5조각내어 나누어 가지는 것이다,

$$4 \div 5$$

$$1 = x \times 5$$

- x 는 1과 5사이의 비례(ratio)를 말하고 있다. 이와 같이 정수와 정수의 비례관계를 나타내는 수를 유리수(有理數, rational number)라고 한다.

- 정수(定數, constant) 변하지 아니하는 일정한 값을 가진 수나 양.
- 유리수(有理數, rational number) 정수의 비로 나타낼 수 있는 수. 정수와 분수가 있으며, 소수로 나타내면 유한 소수나 순환 소수가 된다.
- 무리수(無理數, irrational number) 실수이면서 분수의 형식으로 나타낼 수 없는 수. 예를 들어, $\log 2$, π [같은 말] 3.14159... 따위가 있다.
- 실수(實數, real number) 유리수와 무리수를 통틀어 이르는 말. 사칙 연산이 가능하고, 양수 · 음수 · 0의 구분이 있으며, 크기의 차례가 있다.
- 허수(虛數, imaginary number) 제곱하여 음수가 되는 수. 실수로는 나타낼 수 없는 이차 방정식의 근을 나타내기 위하여 수의 개념을 확장하여 도입한 것
- 복소수(複素數, complex number) 실수와 허수의 합의 꼴로써 나타내는 수. a , b 를 실수, i 를 허수 단위()라고 할 때, $a+bi$ 로 나타내는 것으로, a 를 실수부, bi 를 허수부라고 한다

- 유리수는 분수꼴로 나타내며 분수 꼴로 나타낸 유리수를 분수 fraction 이라고 한다.

- 다음으로 유리수의 크기 비교

$$\frac{4}{5} \text{와} \frac{1}{2} \text{ 중 어느 쪽이 더 클까 ?}$$

- 분모를 같게하는 것을 일반적으로 통분이라고 한다.

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{8}{10}, \frac{1}{2} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{10}$$

- 유리수를 나타내는 또 다른 방법 : 소수점방법

소수점방법은 0보다 크고 1보다 작은 수를 점 아래 쓰는 방법이다. 작은 수를 점으로 표시하는 방법이니 소수점 방법이라 한다.

분수 꼴로 표현된 유리수를 소수점 꼴로 표현하면, 항상 순환마다가 있다. 그리고 순환마다가 있는 수는 항상 유리수 이다.

- 유리수 집합은 4개 기본연산에 대하여 닫혀있다.

유리수의 덧셈 $\frac{a}{b} + \frac{n}{m} = \frac{am}{bm} + \frac{bn}{bm} = \frac{am + bn}{bm}$

유리수의 곱셈 $\frac{a}{b} \times \frac{n}{m} = \frac{an}{bm}$

유리수의 뺄셈 $\frac{a}{b} - \frac{n}{m} = \frac{am - bn}{bm}$

유리수의 나눗셈 $\frac{a}{b} \div \frac{n}{m} = \frac{am}{bn}$

7장 기계도 1차 방정식을 풀 수 있을까

- 식, 등식, 부등식, 방정식, 근, 1차 방정식 표준형 $ax + b = 0$

문) 이모 나이는 35세이고, 내 나이는 10세이다. 몇 년 뒤 이모나이가 내 나이의 두 배가 될까 ?

이미 알려진 정보를 상수로, 모르는 정보를 x 로 바꾸어 정리하면

몇 년 뒤는 x , x 년 뒤 이모나이는 $35 + x$, 내 나이는 $10 + x$, 핵심은 내 나이의 두 배와 같아진다. 그러므로 주어진 문제는

$$2(10 + x) = 35 + x$$

으로 정리된다.

문) 1차 연립방정식의 예 : 농장에 닭과 강아지가 있다. 머리수는 총 15개, 다리 수는 총 40개이다. 닭과 강아지의 개수는?

닭을 x , 강아지를 y 라고 표기하자. 그러면 주어진 조건을 정리하면

머리수가 총 15이므로 $x + y = 15$

다리수가 총 40이므로 $2x + 4y = 40$ (닭은 다리가 2개, 강아지는 4개)

- 수식으로 바꾸어 놓는 순간 문제 자체는 사라진다. 이후에는 수식법칙만 따라가면

된다. 즉, 수학언어로 바꾸고 난후, 정해진 절차를 따라가면 어느새 답이 나온다.

답) $2(10+x) = 35+x$

$$20 \times 2x = 35+x$$

$$2x - x = 35 - 20$$

$$x = 15$$

문제의 조건을 만족하는 값은 15, 15년 후에 내 나이의 두배가 된다.

답) $x+y = 15$ $x = 15-y$

- 다른 한 식에 대입하면

$$2(15-y) + 4y = 40$$

$$20 - 2y + 4y = 40$$

$$2y = 40 - 20$$

$$y = 10$$

강아지가 10마리가 된다. 그러므로 닭은 5마리가 된다.

- 변수가 1개인 어떠한 1차방정식도 다음과 같은 형태로 바꿀 수 있다. 이를 1차방정식의 표준형이라 한다.

$$ax+b=0$$

방정식을 만족하는 x

$$x = -\frac{b}{a}$$

이 된다.

8장 원가 있다. 새로운 수가

- 무리수, $\sqrt{2}$, 무리수의 크기, 덧셈과 곱셈

① 유리수는 십진법으로 나타낼 때, 순환마디가 있는 수를 말한다. 그렇다면 순환마디가 없는 수가 있을까?

$$0.101001000100001000001....$$

- 순환하지 않지만, 틀림없이 존재하는 수이다. 얼마든지 만들어 낼 수 있다.

② 유리수는 분수꼴로 나타낼 수 있는 수를 말한다. 분수로 나타낼 수 없는 수가 있을까?

- 한 변의 길이가 1인 정사각형에서 대각선의 길이를 x 라 할 때 x 의 값은 다음과 같이 계산된다.

- 피타고라스 정리에 의하여

$$1^2 + 1^2 = x^2$$

$$2 = x^2$$

- 어떠한 수를 제곱하면 2가 될까?

- 단위길이 1을 기준으로 켤 수 없는 수를 무리수라고 한다. 유리수가 아닌 수 또는 자연수로 비례관계를 알 수 없는 수라는 뜻을 가진다.

“ 2제곱해서 2가 되는 수는 방정식 $x^2 = 2$ 의 근 root 이다.”

- 근 또는 뿌리라는 뜻인 root의 r 과 닮은 $\sqrt{\quad}$ 기호를 쓰고 루트라고 부른다.

$x^2 = 2$ 의 근에 대한 바른 표기법은 $\sqrt[2]{2}$ 이지만 $\sqrt{2}$ 라고 줄여서 표기한다.

- 무리수의 크기 비교. 가장 기본적으로 다음이 성립한다.

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42 \quad 1.41^2 = 1.9881, \quad 1.42^2 = 2.0164 \text{이므로}$$

- 무리수의 연산 덧셈

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

- 무리수 4칙연산(더하기, 빼기, 곱하기, 나누기)에서 '닫힘 (닫혀있다.)' 와 '열려있다.' 의 정의

- 집합 A의 두 원소 $a, b \in A$ 가 있어, 각각 4칙 연산을 시행했을 때, 그 결과의 수도 집합 A의 원소가 되는 경우 “닫혀있다.” 라고 말하며 각각 연산을 시행했을 때, 그 결과의 수가 집합 A의 원소가 아닌 수가 나타나는 경우의 수가 있으면 “열려있다.”라고 정의한다.

- 그러면 무리수에 대해서 과연 4칙 연산 하에서 닫혀있는지 또는 열려있는지 알아보자

1. 무리수의 덧셈 (+)

(1) $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ 연산이 가능하다.

(2) $4 + \sqrt{3} \doteq 4 + 1.7321... = 5.7321...$ 되지만, 등호는 성립하지 않는다.

그러므로 무리수의 덧셈 연산은 닫혀있지 않고 **열려있다**.

2. 무리수의 뺄셈 (-)

(1) $4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ 연산이 가능하다.

(2) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ 근사값으로는 가능, 완벽한 계산은 불가능

(3) $\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$ 0은 정수로서 무리수가 아님

그러므로 뺄셈 연산하에서도 닫혀있지 않고 **열려있다**.

3. 무리수의 곱셈 (×)

(1) $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$ 곱셈이 가능하다

(2) $5\sqrt{3} \times \sqrt{7} = 5\sqrt{21}$ 연산이 가능하다.

(3) $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$ 5는 무리수가 아니고 자연수임

그러므로 무리수의 곱셈 연산은 닫혀있지 않고 **열려있다**.

4. 무리수의 나눗셈 (÷)

(1) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}} \div \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{6*2}}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{4*2}}{\sqrt{9*2}} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

또는 간단히

$$\sqrt{\frac{12}{6}} \div \sqrt{\frac{18}{8}} = \sqrt{\frac{12}{6}} \times \sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(2) $\sqrt{7} \div \sqrt{7} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \sqrt{1} = 1$

연산결과 1은 무리수가 아니고 자연수(양의 정수)이다.

그러므로 무리수의 ‘나눗셈’도 닫혀있지 않고 **열려있다**.

- 무리수의 4칙 연산, 즉 무리수의 덧셈, 무리수의 뺄셈, 무리수의 곱셈, 무리수의 나눗셈 등 **모든 영역의 연산하에서 닫혀있지 않고 열려있다**.

- 제곱근 값 $\sqrt{x}$ 계산하기

$\sqrt{x}$ 의 값을 구하고 싶다고 합시다. v 가 $\sqrt{x}$ 의 근사값일 때, 다음 값은 $\sqrt{x}$ 에 훨

썬 더 가까워진다.

$$(v + x/v)/2$$

예를 들어서, $\sqrt{7}$ 을 구하고 싶다고 하자. 이 값이 2와 3 사이임을 아므로, $\sqrt{7}$ 의 근사값으로 3을 선택한다. 그리고 위 식에 집어넣으면

$$(3 + 7/3)/2 = 16/6 = 2.666666...$$

다시 한번 이 값을 집어넣어 계산하면

$$(16/6 + 7 \cdot 6/16)/2 = 127/48 = 2.6458333333...$$

또 다시 집어넣어 계산하면

$$(127/48 + 7 \cdot 48/127)/2 = 32257/12192 = 2.645751312335958...$$

$\sqrt{7}$ 을 소수점 20자리까지 구한 값 2.6457513110645905905 와 비교하면 상당히 잘 맞는다. 사실, 두번째 계산에서도 반올림을 하게 되면 소수점 넷째 자리까지 들어 맞는다.

9장 2차방정식 풀이 - 예고편

- 2차방정식 표준형 $ax^2 + bx + c = 0$. 짐작으로 풀이 인수분해로 풀이, 그림으로 풀이

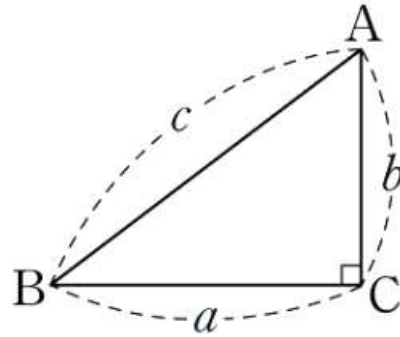
2차 다항으로 된 등식이 참인 x 찾기가 2차방정식 풀이다.

- 2차방정식의 예

직각삼각형에서 빗변의 길이 계산하기 : 피타고라스 정리 $a^2 + b^2 = c^2$

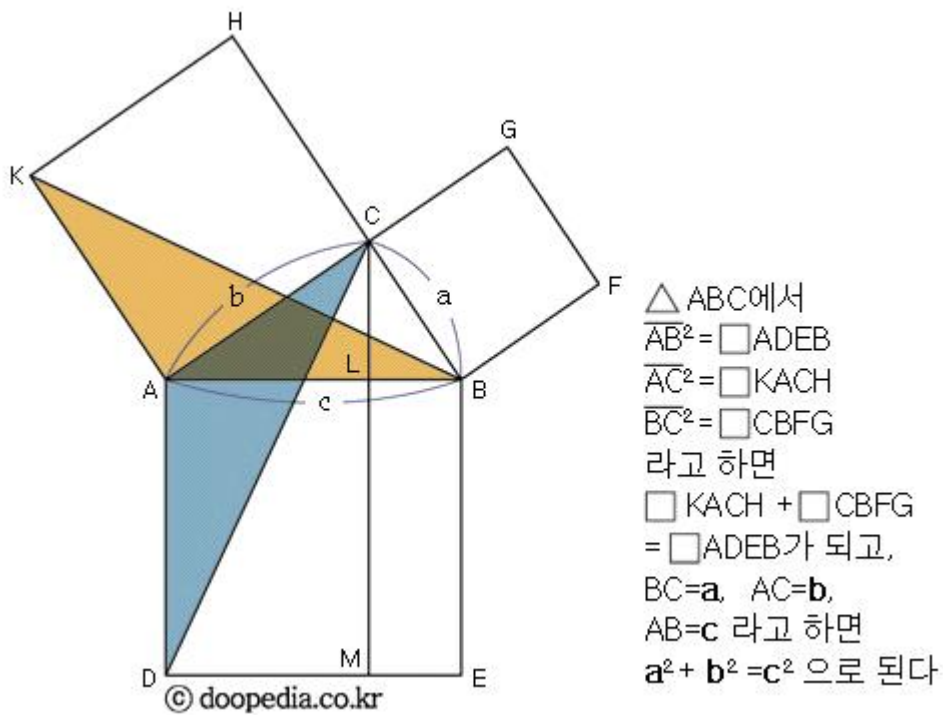
직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a , b 라 하고, 빗변의 길이를 c 라 하면 $a^2 + b^2 = c^2$ 이 성립한다.

[참고] 직각삼각형에서 직각을 끼고 있는 두 변의 제곱의 합은 빗변의 길이의 제곱과 같다.

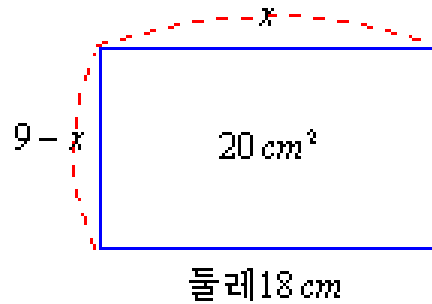


‘직각삼각형 3개의 변을 a , b , c 라 하고 c 에 대한 각이 직각일 때 $a^2+b^2=c^2$ ’라는 피타고라스의 정리를 증명하는 방법은 오늘날 400여개 가까이 존재하며 계속해서 새로운 증명법이 개발되고 있다. 전해져 오는 증명법 가운데 가장 널리 알려진 것은 그리스 수학자 유클리드(Euclid, BC330-BC275)의 저서 《기하학 원론》에서 나온 증명이다. 그 내용은 다음과 같이 요약할 수 있다.

[출처] 피타고라스의 정리 | 두산백과



- 이차방정식의 뜻



예를 들어 오른 쪽 그림과 같이 길이 18cm인 끈으로 넓이 20 cm^2 인 직사각형 모양을 만들 때, 가로와 세로의 길이를 구하는 문제를 생각해 보자.

직사각형의 넓이를 구하는 식은 **가로×세로 = 넓이**이므로 $x \cdot (9-x) = 20$ 을 전개하여 간단히 하면 $x^2 - 9x + 20 = 0$ 이 된다. 이와 같이 좌변이 x 에 대한 이차식이고 우변이 0인 방정식을 **x 에 대한 이차방정식**이라고 한다. 여기서 좌변을 인수분해 하면 $(x-4) \cdot (x-5) = 0$ 이 되고 이 식을 만족하는 x 는 4와 5가 된다.

- 이차방정식의 일반형

두 개의 값을 p, q 라고 가정하면 다음식이 성립한다.

$$(x-p)(x-q) = 0$$

$$x^2 - qx - px + pq = 0$$

$$x^2 - (p+q)x + pq = 0$$

의 수식에 대한 일반형으로 나타내면 다음과 같다.

$$x^2 + bx + c = 0$$

- 더욱더 일반적 항으로 정리하면 다음과 같으며, 이것이 2차방정식을 나타내는 표준형이다.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

10장 이차방정식의 풀이 - 완결편

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{에서 } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 2차방정식의 근의 공식을 제대로 이해하는 것이 수학공부 과정 전체를 통틀어 뿌리중의 뿌리라고 여기기 때문에 지독하게 닥달한다.

11장 함수 아닌게 있을까 ?

- 함수, 정의역, 치역, 좌표평면, 독립변수, 종속변수, 함수 나타내기
- 세상의 온갖 현실 문제를 수학언어로 바꿔서 해결할 가능성을 열었다. 집합과 집합의 대응관계까지 수학언어로 담으려고 하는 것 그것이 함수이다.
- 영화관에서 표하나와 좌석하나가 대응하는 것이 함수이고, 우리나라 돈을 외국돈으로 환전하는 것도 함수이고, 통역도 함수이다. 또한 어떤 도형과 그 도형의 넓이도 함수이다. 피아노도 함수이고, 전화기도 함수이다.
- 수학에서는 두 집합 사이의 대응관계를 함수라는 개념으로 잡아낸다. **함수란 무엇인가라고 하지 않고 함수 아닌 것이 있을 까**라고 제목을 지은 이유가 있다.

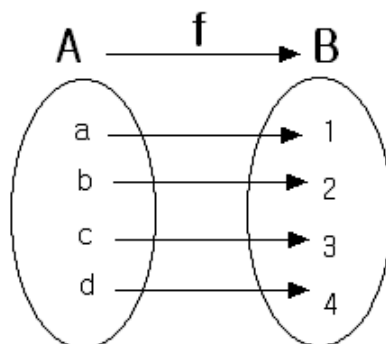
- 함수 정의하기

함수 : 두 집합 A , B 가 있을 때, 집합 A 의 내부에 있는 원소 하나가 집합 B 에 있는 원소의 하나에 대응하는 것을 함수라고 정의한다.

예) 사냥꾼 4명이 있다. 사냥감은 곰, 늑대, 여우, 토끼가 있다. 사냥꾼이 사냥감을 어떻게 잡을 것인가라는 문제를 수학적으로 정리하면 다음과 같이 표현된다.

사냥꾼의 집합을 A 라고 하면, 원소는 사냥꾼1 = a , 사냥꾼2 = b , 사냥꾼3 = c , 사냥꾼4 = d 라고 하고, 사냥감의 집합을 B 라고 하면, 곰 = 1, 늑대 = 2, 여우 = 3, 토끼 = 4고 할 때, 사냥꾼이 어떠한 순서로 사냥감을 잡을 것인지에 대한 관계를 맺어주는 것을 즉, 사냥꾼과 사냥감에 대한 대응관계를 함수 f 라고 표기할 수 있다.

사냥꾼과 사냥감의 대응관계는 주어지는 조건에 따라 달라진다. 사냥꾼과 사냥감의 대응관계 중 하나의 예를 다음에서 보여주고 있다.



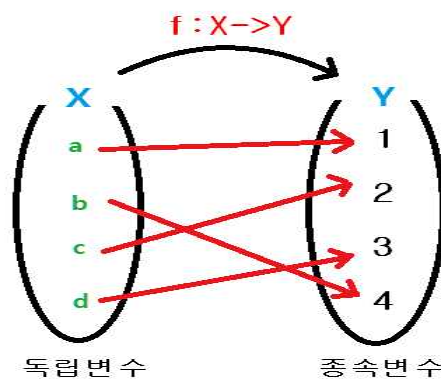
수학적인 용어로 집합 A 를 정의역(domain)이라하고, 집합 B 를 치역(range) 혹은 (image)라고 한다. 함수 f 는 집합 A 에서 집합 B 로의 대응이고, 대응규칙은 f 에 의하여 분명하게 드러난다.

다음의 것들은 함수로 정의되지 않는다.

- ① 정의역 원소 하나가 여럿으로 대응될 때
- ② 정의역에 대응이 안된 원소가 있을 때

- 수학용어로 함수 표현하기

집합 X 에서 집합 Y 로 대응하는 게 함수 f 라면, $f: X \rightarrow Y$ 로 쓸 수 있다. 이때 정의역인 집합 X 의 원소들에 해당하는 변수를 독립변수라고 하고 그에 대응하는 치역인 집합 Y 의 원소에 해당하는 변수를 종속변수라고 한다.



- 수학적으로 표현된 함수를 가장 간단하게 표현하는 방법은 그림으로 나타내는 것이다. 가장 간단한 것은 독립변수의 값을 그래프에서 x 에 나타내고 종속변수는 그래프에서 y 축에 나타내는 것이다.

함수의 결과값은 그래프로 표현된다.

12장 함수 동물원 구경하기

- 다변수 함수, 직선함수, 곡선함수, 꺾인 함수, 연속함수
- 과학자들이 하는 일은 함수(function) f 를 찾는 것이다.

1) 행복을 결정하는 핵심을 건강이라고 한다면,

독립변수로 건강을 종속변수로 행복을 고려한다면 함수 f 는 다음과 같다.

$$f(\text{건강}) = \text{행복}$$

2) 단풍이 드는 정도가 기온에 영향을 받는다면.

독립변수로 기온을 종속변수로 단풍을 고려한다면 함수 f 는 다음과 같다.

$$f(\text{기온}) = \text{단풍}$$

이와 같이 독립변수가 하나인 함수의 표준형은 다음과 같다.

$$f(x) = y$$

3) 행복을 결정하는 핵심을 건강과 우정이라고 한다면,

- 독립변수로 건강, 우정을 종속변수로 행복을 고려한다면 함수 f 는 다음과 같다.

$$f(\text{건강}, \text{우정}) = \text{행복}$$

4) 철새의 이동지점을 예측할 때 풍속과 기온이라는 두 변수에 따라 위치가 결정한다고 하면,

- 독립변수로 풍속, 기온을 종속변수를 철새위치로 고려한다면 함수 f 는 다음과 같다.

$$f(\text{풍속}, \text{기온}) = \text{철새위치}$$

이와 같이 독립변수가 두개인 함수의 표준형은 다음과 같다.

$$f(u, v) = y$$

5) 덧셈 $2+3+4=9$, 곱셈 $2*3*4=24$ 는 독립변수가 3개인 함수가 된다. 일반적으로 함수를 표기하는 f 를 사용하면 다음과 같이 혼동되므로 f 를 혼동하지 않기 위하여 별도의 표기를 사용하여야 한다.

- 덧셈을 위한 함수 명을 PLUS라고 하면

$$PLUS(2, 3, 4) = 9$$

라고 할 수 있고,

- 곱셈을 위한 함수 명을 MULTI라고 하면

$$MULTI(2, 3, 4) = 24$$

라고 할 수 있다.

- 독립변수가 3개인 경우 함수의 표준형은 다음과 같다.

$$f(u, v, w) = z$$

13장 함수를 셈할 수 있을 까 ?

- 상수함수, 항등함수, 함수 합성 또는 합성함수

- 함수를 짜임새 있게 이해할 수 있는 방법 어디 없나?

원리 : 단순한 함수들을 결합하면서 복잡한 함수들을 만들어 간다.

14장 위 아래로 미끄러지기

15장 위 아래로 늘이고 줄이고 뒤집기

16장 1차함수 완전정복

- 1차방정식 표준형 $ax + b = 0$
- 1차함수 표준형 $y = ax + b$

- a , b 의 값에 따라 1차함수의 결과 그래프가 변해가는 것과 그때 1차 방정식의 해와의 관계를 보충설명

17장 좌우로 미끄러지기

18장 좌우로 늘이고 줄이고 뒤집기

19장 2차함수 완전정복

- 2차방정식 표준형 $ax^2 + bx + c = 0$
- 2차함수 표준형 $y = ax^2 + bx + c$

- a , b , c 의 값에 따라 2차함수의 결과 그래프가 변해가는 것과 그때 2차 방정식의 해와의 관계를 보충설명

* 방정식의 결과는 값으로 주어지고, 함수의 결과는 그래프로 주어진다.