대응

1. 대응

(1) 어떤 주어진 관계에 의하여 집합 X 의 원소에 집합 Y 의 원소를 짝지어 주는 것을 집합 X 에서 집합 Y 로의 **대응**이라고 한다.

(2) 집합 X 의 원소 x 에 집합 Y 의 원소 y 가 짝지어지면 x 에 y 가 **대응한다**고 하며 이것을 기호로 $x \to y$ 와 같이 나타낸다.

2. 일대일 대응

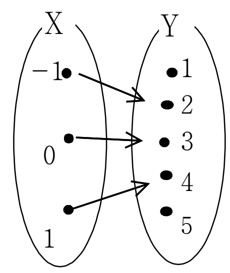
(1) 집합 A 의 모든 원소와 집합 B 의 모든 원소가 **하나도 빠짐없이 꼭 한 개씩** 서로 대응되는 것을 집합 A 에서 집합 B 로의 **일대일 대응**이라고 한다.

(2) $n(\mathrm{X}) = n(\mathrm{Y}) = a$ 라 할 때, 즉 집합 X 의 원소의 개수가 a 개이고, 집합 Y 의 원소의 개수가 a 개일 때, 집합 X 에서 집합 Y 로의 **일대일 대응의 개수**는 $a! = a \times (a-1) \times (a-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

1. 어떤 관계에 의하여 집합 X 의 원소에 집합Y 의 원소를 짝지어주는 것을 X 에서 Y 로의 (　　)이라 한다.

2. x 에 y 가 대응하는 것을 기호로 (　　)와 같이 나타낸다.

3. 다음 그림의 대응에서 집합 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에 대응하는 Y 의 원소를 차례로 쓰시오.



4. $\mathrm{X} = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $\mathrm{Y} = \{2,\ 3,\ 4\}$일 때, X 의 원소 x에 Y 의 원소 y를 『y는 x의 약수의 개수이다.』인 관계로 대응시킬 때, Y 의 원소 2에 대응하는 X 의 원소 x를 구하시오.

3. 함수

(1) 함수

집합 X 의 각 원소에 대응하는 집합 Y 의 원소가 단 하나만인 대응을 f 라 할 때, 이 대응 f 를 X 에서 Y 로의 **함수**라고 하고 이것을 기호로 $f: X \to Y$ 와 같이 나타낸다.

(2) 정의역과 공역

정의역: 함수 $f: X \to Y$ 에서 집합 X ,

공 역: 함수 $f: X \to Y$ 에서 집합 Y

(3) 함수의 개수

$n(X) = a, n(Y) = b$ 일 때, $f: X \to Y$ 로의 함수의 개수는 b^a 개이다.

(4) 함숫값

① 함수 $f: X \to Y$ 에서 X 의 원소 x 에 대응하는 Y 의 원소 y 가 있을 때, 이 대응관계를 $\boldsymbol{y = f(x)}$ 와 같이 나타낸다.

* 변수

함수 $y = f(x)$ 에서 x 와 y 를 함수 f 의 변수라고 한다.

② 함숫값

함수 $f: X \to Y$ 에서 X 의 원소 m 에 대응하는 Y 의 원소 $f(m)$ 를 $x = m$ 에서의 **함숫값**이라고 한다.

(5) 치역

함수 $f: X \to Y$ 에서 x 의 각 원소에 대응하는 함숫값 전체의 집합을 함수 f 의 **치역**이라 한다.

5. 집합 X 의 모든 원소와 집합 Y 의 모든 원소가 하나도 빠짐없이 꼭 한 개씩 서로 대응하는 것이 X 에서 Y 로의 (　　)이다.

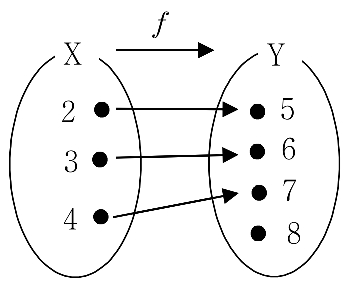
6. 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수를 기호 (　　)와 같이 나타낸다.

7. 함수 $f: X \to Y$ 에서 집합 X 를 함수의 (　　), 집합 Y 를 함수 f 의 (　　)이라고 한다.

8. 오른쪽 그림과 같이 대응하는 함수 f : X → Y 에 대하여 다음을 구하시오.

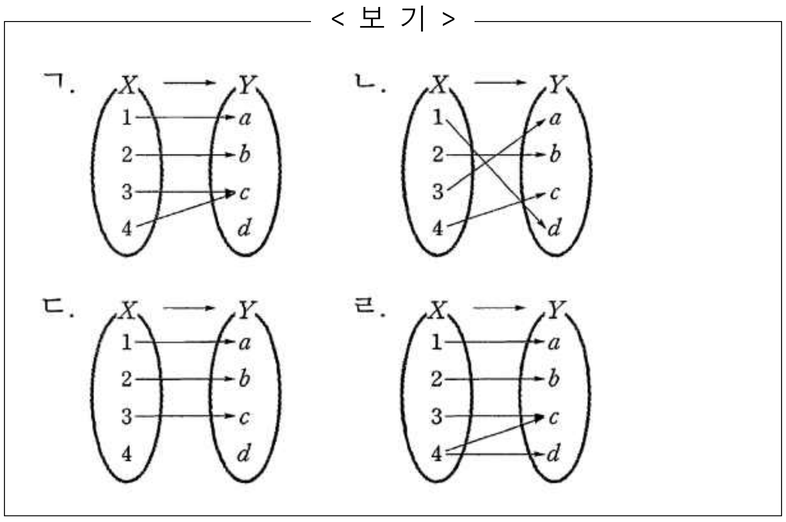
(1) 정의역

(2) 공역

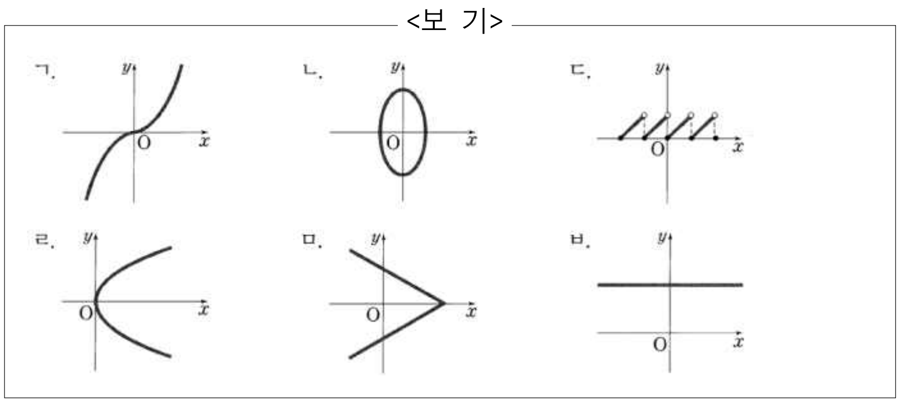


9. 두 집합 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b\}$ 일 때, 집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 구하시오.

10. 다음 보기 중 집합 X에서 집합 Y로의 함수인 것을 모두 고르시오.



11. 다음 보기의 그래프 중 함수인 것을 모두 고르시오.



12. 다음 보기 중 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수인 것을 모두 고르시오.

< 보 기 >

ㄱ. $f(x)=2x$	ㄴ. $f(x)=\dfrac{8}{x}$
ㄷ. $f(x)=5$	ㄹ. $f(x)=x^2$

13. 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$와 실수 전체의 집합 R에 대하여 X에서 Y로의 두 함수 f, g가 다음 보기와 같을 때, 보기 중 두 함수 f, g가 서로 같은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\begin{cases} f(x)=x^3-3 \\ g(x)=x-x^3 \end{cases}$ ㄴ. $\begin{cases} f(x)=1-x \\ g(x)=1+|x| \end{cases}$

ㄷ. $\begin{cases} f(x)=x-3 \\ g(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3} \end{cases}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

14. $X=\{0,1,2\}$, $Y=\{-3,-1,1,3\}$ 이고, $x\in X$, $y\in Y$ 일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 정의역과 공역을 구하시오.

(2) $f:X\to Y$ 로의 함수의 개수를 구하시오.

(3) $y=-2x+3$ 인 관계로 대응시키면 $y=-1$ 에 대응되는 x 의 값을 구하시오.

15. $n(X)=3$, $n(Y)=3$ 일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 집합 X 에서 집합 Y 로의 일대일 대응은 몇 가지를 만들 수 있는가?

(2) $f:X\to Y$ 는 몇 가지를 만들 수 있는가?

16. 집합 $X=\{1,3,5,7,9\}$ $Y=\{y|y$ 는 자연수$\}$ 일 때, 다음 중 함수인 것은? (단, $x\in X$, $y\in Y$)

① $y=x+3$ ② $y=x-2$ ③ $y=$ (x 의 약수)
④ $y=2x+3$ ⑤ $y=$ (x 의 배수)

17. $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{y|y$ 는 자연수$\}$ 가 있다. $f\ :X\to Y$ 가 $y=2x+3$ 일 때,
이 함수의 정의역과 공역을 원소나열법으로 쓰시오.

18. 함수 $f(x)=6x-5$ 에 대하여 다음 함숫값을 구하시오.

(1) $f(-1)$ (2) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ (3) $f(a)=4$ 일 때, a 의 값

19. $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 이고, $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ 인 함수 $f\ :\ X\ \to Y$ 에서
$y=(x$ 의 약수의 개수$)$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $f(1)=0$ ② $f(2)=1$ ③ $f(3)=2$
④ $f(4)=3$ ⑤ $f(5)=4$

20. 함수 $f:X\to Y$ 가 $y=2x+a$ 로 정의되고 $f(1)=1$ 일 때,
a 의 값을 구하시오.

21. 정의역이 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, 공역이 $Y=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 인 함수 $f(x)=2x$ 에서
$f(3)$ 의 값을 구하시오.

22. $X=\{3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ 인 함수 $f\ :\ X\ \to Y$ 에서 $y=-x+5$ 일 때,
$f(4)-f(5)$ 의 값을 구하시오.

23. $X=\{0,\ 1,\ 2\}$, $Y=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$ 에 대하여 함수 $f\ :\ X\ \to Y$ 에서
$y=3x+1$ 인 관계에 있을 때, 다음을 원소나열법으로 나타내시오.

(1) 정의역 (2) 공역 (3) 치역

24. 함수 $f\ :\ X\ \to Y$ 의 치역을 Z 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $X\subset Z$ ② $Z\subset X$ ③ $X\subset Y$
④ $Z\subset Y$ ⑤ $Y\subset Z$

25. 밑변의 길이가 6cm, 높이가 $x$cm 인 삼각형의 넓이를 $y\text{cm}^2$ 라 한다.
x 에 y 를 대응시킨 함수를 $f(x)$ 라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.
(1) $f(x)$ 를 x 에 식으로 나타내시오.

(2) 정의역이 $\{2,3,4\}$ 일 때, 함수 f 의 치역을 구하시오.

26. 집합 X 에서의 함수 $y=\frac{1}{4}x+1$ 의 치역이 $\{0,-1,-2,-3\}$ 일 때, 정의역 X 를 구하시오.

27. 다음 함수의 정의역과 치역을 각각 구하시오.
(1) $y=\frac{1}{x}$ (2) $y=3x-4$

(3) $y=x^2-1$ (4) $y=|x|$

28. 두 집합 $X=\{x|-1\leq x\leq 2\}$, $Y=\{y|y$는 실수$\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=2x+3$의 치역을 구하시오.

29. 함수 $y=2x+1$의 치역이 $\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$일 때, 정의역을 구하시오.

30. 두 집합 $X=\{a,\ b,\ c\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수의 개수를 구하시오.

31. 두 집합 $X=\{1,\ 2\}$, $Y=\{y\mid y$는정수$\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f,g가 $f(x)=x+1$, $g(x)=x^2+ax+b$이다.
$f=g$일 때, 실수 $a,\ b$의 곱 ab의 값을 구하시오.

32. 집합 X에서 실수 전체의 집합 R로의 두 함수 $f(x)=x^3$, $g(x)=2x^2+3x$에 대하여
$f=g$가 되도록 하는 집합 X의 개수를 구하시오.(단, $X\neq\varnothing$)

4. 여러가지 함수

(1) 일대일함수와 일대일 대응 : 함수 $f\ :\ X \to Y$에서

① 일대일 함수 : 임의의 $x_1,\ x_2 \in X$에 대하여

$x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 함수

* $n(X)=a\,,\, n(Y)=b$ 일 때 일대일 함수의 개수는

${}_bP_a = b\times(b-1)\times(b-2)\times\cdots\times\{b-(a-1)\}$개이다.(단, $b \geq a$)

② 일대일 대응 : 일대일 함수이고 치역과 공역이 같은 함수

* $n(X)=n(Y)=a$ 일 때 일대일 대응의 개수는

$a! = a\times(a-1)\times(a-2)\times\cdots 3\times 2\times 1$ 개이다.

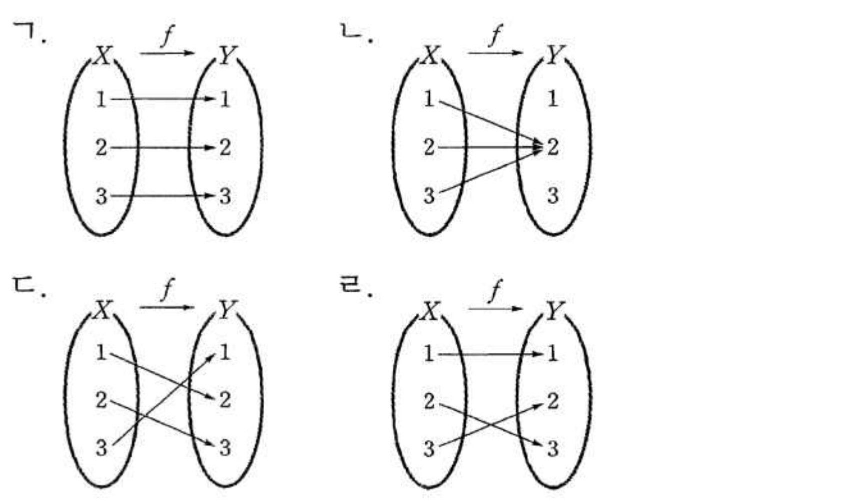
(2) 항등함수와 상수함수 : 함수 $f\ :\ X \to Y$에서

① 항등함수 : $X=Y$이고 임의의 $x\in X$에 대하여 $f(x)=x$인 함수 기호로는 I를 주로 사용한다.

② 상수함수 : 치역의 원소가 하나인 함수로 $f(x)=a$인 함수 $(a\in Y)$

33. 다음 보기의 함수 중 일대일 대응, 항등함수, 상수함수를 각각 고르시오.

< 보 기 >



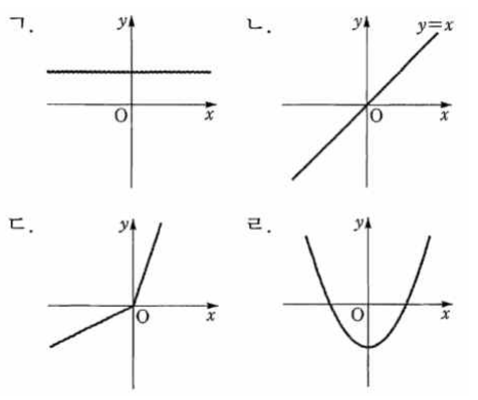
34. 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 다음 보기 중 집합 X에서 집합 X로의 함수가 일대일 대응인 것과 항등함수인 것을 각각 고르시오..

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x$	ㄴ. $g(x)=-x$
ㄷ. $h(x)=x^2-1$	ㄹ. $k(x)=\lvert x\rvert$

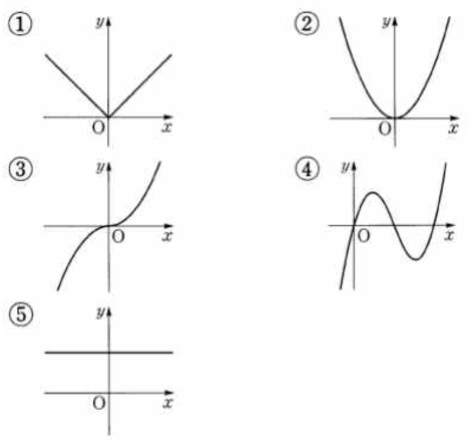
35. 아래 보기의 함수의 그래프에 대하여 다음 물음에 답하시오.
(단, 정의역과 공역은 실수 전체의 집합)

< 보 기 >



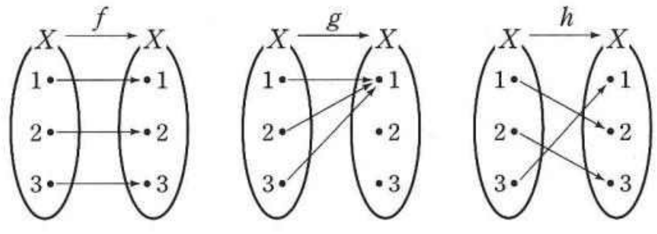
(1) 일대일 대응의 그래프를 고르시오..
(2) 항등함수의 그래프를 고르시오..
(3) 상수함수의 그래프를 고르시오..

36. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수의 그래프 중 일대일 대응의 그래프인 것은?



37. 두 집합 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수의 개수를 p, 일대일 대응의 개수를 q라 할 때, $p-q$의 값을 구하시오.

38. 함수 f, g, h 의 대응 관계가 다음과 같다. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?



<보 기>

ㄱ. f는 상수함수이다.
ㄴ. g는 항등함수이다.
ㄷ. 일대일 대응인 것은 2개이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

39. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 가 있다. f 는 항등함수이고, g 는 상수함수이며, $g(1)=4$ 이다. 이 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

40. 집합 $X=\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$에서 집합 $Y=\{y \mid 0 \leq y \leq 4\}$로의 함수 $f(x)=px+q$가 일대일 대응일 대, pq의 값을 모두 구하시오. (단, p, q는 상수)

41. 실수2 전체의 집합 R에서 R로의 함수 f가

$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 0) \\ (2-a)x+1 & (x<0) \end{cases}$로 정의되고 일대일 대응일 때,

a의 값의 범위를 구하시오.

5. 합성함수

1. **합성함수** : 두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$의 합성함수 $g \circ f$는 다음과 같이 정의한다.

$g \circ f : X \to Z$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

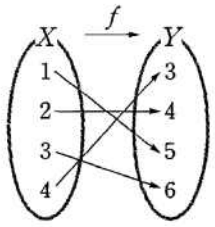
2. **합성함수의 성질** : 세 함수 f, g, h에 대하여

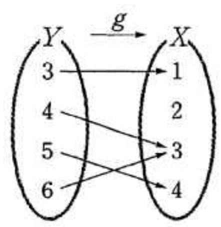
1) $f \circ g \neq g \circ f$

2) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

3) $f \circ I = I \circ f = f$ (I는 항등함수)

42. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{3, 4, 5, 6\}$에 대하여
두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$가 다음 그림과 같이 정의되어 있을 때,
합성함수 $f \circ g$, $g \circ f$에 대하여 다음을 구하시오.





(1) $(g \circ f)(1)$ (2) $(f \circ g)(5)$

43. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3x - 1$에
대하여 다음을 구하시오.

(1) $(f \circ g)(x)$ (2) $(g \circ f)(x)$

(3) $(f \circ f)(x)$ (4) $(g \circ g)(x)$

(5) $(f \circ g)(1)$ (6) $(g \circ f)(1)$

44. 세 함수 $f(x) = x + 1$, $g(x) = -2x + 3$, $h(x) = -x^2 + 2$에 대하여
다음을 구하시오.

(1) $((h \circ g) \circ f)(x)$ (2) $(h \circ (g \circ f))(x)$

(3) $((h \circ g) \circ f)(1)$ (4) $(h \circ (g \circ f))(1)$

45. 함수 $f(x)=4x-3$에 대하여 $(f\circ f)(a)=17$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

46. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x<0) \\ 1-x & (x\geqq 0) \end{cases}$일 때, $(f\circ f\circ f\circ f)(2)$의 값을 구하시오.

47. 두 함수 $f(x)=3x-1$, $g(x)=x^2+x-1$에 대하여 $(f\circ g)(a)=2$일 때,
양수 a의 값을 구하시오.

48. 함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases} 0 & (x\text{가 유리수}) \\ 1 & (x\text{가 무리수}) \end{cases}$일 때, $(f\circ f)(\sqrt{3})$의 값을 구하시오.

49. 두 함수 $f(x)=\frac{x}{2}-1$, $g(x)$에 대하여 $(g\circ f)(x)=2x-1$이 성립할 때,
$g(1)$의 값을 구하시오.

50. 두 함수 $f(x)=2x-3$, $g(x)=6x+3$에 대하여 다음을 만족하는
함수를 구하시오.
(1) $(f\circ h)(x)=g(x)$를 만족하는 함수 $h(x)$
(2) $(h\circ f)(x)=g(x)$를 만족하는 함수 $h(x)$

51. 두 함수 $f(x)=x^2+1$, $g(x)=2x-1$에 대하여 $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$를 구하고 $f\circ g\neq g\circ f$임을 확인하시오.

52. 두 함수$f(x)=2x+a$, $g(x)=-x+1$에 대하여 $g\circ f=f\circ g$가 성립할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

53. 두 함수 $f(x)=ax-b$, $g(x)=bx-a$가 $f\circ g=g\circ f$를 만족할 때,
$f(3)+g(3)$의 값을 구하시오. (단, $a\neq b$)

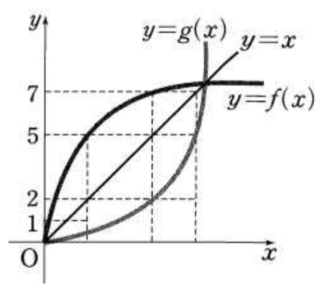
54. 세 함수 $f(x)=2x-1$, $g(x)=x^2$, $h(x)=-2x$에 대하여
$((f\circ g)\circ h)(x)$, $(f\circ(g\circ h))(x)$를 구하고 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$임을 확인하시오.

55. $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=x^2-1$일 때, $f(-1)+f(2)$의 값을 구하시오.

56. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 $f\left(\dfrac{x+3}{2}\right)=2x+1$을 만족할 때, $f(2x+1)$을 구하시오.

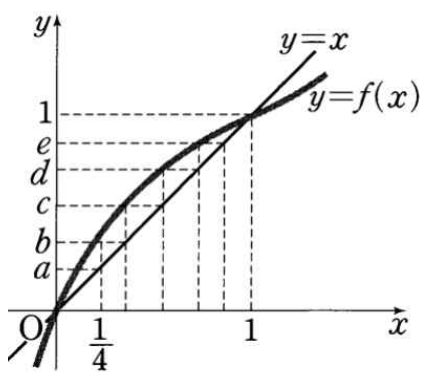
57. 함수 $f(x)=x^2+1$에 대하여 $(f\circ f\circ f)(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

58. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $(g\circ f)(5)$의 값을 구하시오.



59. 오른쪽 그림은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=x$의 그래프이다.
합성함수 $f\circ f$를 f^2, $f^2\circ f$를 f^3, $\cdots$, $f^n\circ f$를 f^{n+1}로 나타낼 때, $f^4\left(\dfrac{1}{4}\right)$의 값은? (단, n은 자연수)

① a　② b
③ c　④ d
⑤ e

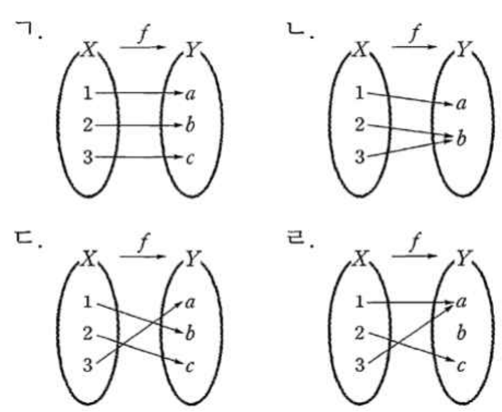


6. 역함수

1. **역함수의 정의 :** 함수 $f\ :\ X \rightarrow Y$가 일대일 대응일 때, Y의 원소 y에 대하여
   $f(x)=y$가 되는 $x \in X$를 대응시키는 함수를 f의 역함수라 하고,
   다음과 같이 나타낸다.
   $f^{-1}\ :\ Y \rightarrow X,\ y \rightarrow x$
2. **역함수를 갖기 위한 조건 :** 일대일 대응이어야 한다.
3. **역함수 구하는 법 :** x와 y를 바꾸어서 y에 대하여 푼다.
   * 주의!!! 역함수를 구할때는 정의역과 치역에 주의한다.
   $y=f(x)$의 정의역은 $y=f^{-1}(x)$의 치역으로!!!
   $y=f(x)$의 치역은 $y=f^{-1}(x)$의 정의역으로!!!
4. **역함수의 성질 :**
   1) $f^{-1} \circ f = I,$ 2) $(f^{-1})^{-1}=f$
   3) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ 4) $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$
5. **역함수의 그래프 :**
   1) $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.
   2) $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$, $y=x$의 그래프의 교점은 일치한다.
   * $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점을 구할 때는
   $y=f(x)$와 $y=x$ 또는 $y=f^{-1}(x)$와 $y=x$의
   교점을 구하면 편할 때가 많다.

60. 다음 보기의 함수 중 역함수가 존재하는 것을 모두 고르시오..

< 보 기 >



61. 다음 보기의 함수가 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수일 때, 역함수가 존재하는 것을 모두 고르면?

< 보 기 >

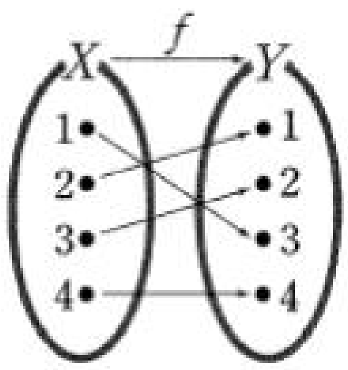
ㄱ. $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geqq 0) \\ x & (x<0) \end{cases}$

ㄴ. $g(x)=\begin{cases} x+1 & (x \geqq 0) \\ -x+1 & (x<0) \end{cases}$

ㄷ. $h(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \geqq 0) \\ -x^2-1 & (x<0) \end{cases}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

62. 함수 f가 오른쪽 그림과 같이 정이될 때, 다음 값을 구하시오.



(1) $f(2)$

(2) $f^{-1}(2)$

(3) $(f^{-1} \circ f)(1)$

(4) $(f \circ f^{-1})(3)$

63. 다음 함수의 역함수를 구하시오.

(1) $f(x)=2x+3$

(2) $y=x^2\ (x \geqq 0)$

64. 다음 물음에 답하시오.

(1) 두 함수 $f(x)=2x+a$, $g(x)=x^2+bx+3$에 대하여 $f^{-1}(4)=2$, $g(1)=5$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

(2) 함수 $f(x)=5x-2$의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때, $g(8)+g^{-1}(2)$의 값을 구하시오.

65. 두 함수 $f(x)=ax+1$, $g(x)=x+a$이고 $g^{-1}(1)=2$일 때,
$f^{-1}(2)+g(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수)

66. 함수 $f(x)=x+a$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$가 서로 같을 때,
상수 a의 값을 구하시오.

67. 함수 $y=ax+b$의 역함수가 $y=2x-1$일 때, 상수 a, b의 곱ab를 구하시오.

68. 실수 전체의 집합에서 정의된 일대일 대응인 세 함수 f, g, I에 대하여
다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, I는 항등함수)

< 보 기 >

ㄱ. $f \circ g = g \circ f$
ㄴ. $(f^{-1})^{-1} = f$
ㄷ. $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
ㄹ. $f \circ g = I$이면 $g = f^{-1}$

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄹ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

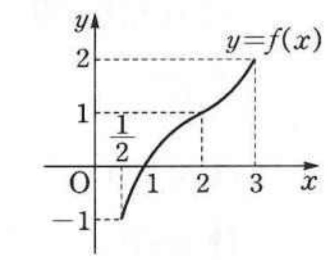
69. 두 함수 $f(x)=x-2$, $g(x)=3x-3$에 대하여 $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(3)$의
값을 구하시오.

70. 두 함수 $f(x)=2x$, $g(x)=x^2$에 대하여
$(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(k)=4$를 만족하는 상수 k의 값을 구하시오.

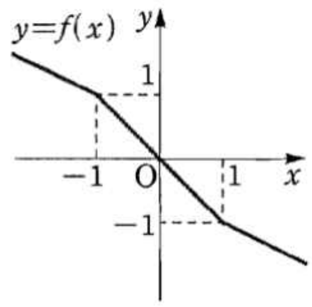
71. 두 함수 $f(x)=2x+3$, $g(x)=3x+5$와 일차함수 h에 대하여
$f \circ h = g$일 때, $h(x)$를 구하시오.

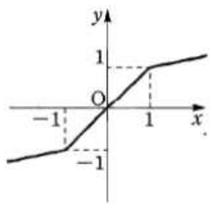
72. 세 함수 $f(x)=2x$, $g(x)=x+2$, $h(x)$에 대하여
$(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=h(x)$를 만족할 때, $h(2)$의 값을 구하시오.

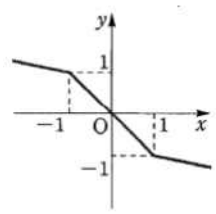
73. $\frac{1}{2}\leqq x\leqq 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고
$(f\circ f)(2)=a$일 때, $f^{-1}(a)$의 값을 구하시오.

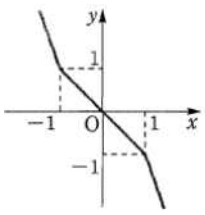


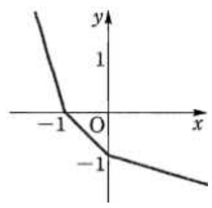
74. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 함수 f의
역함수를 g라 할 때, 다음 중 $y=g(x)$의 그래프는?

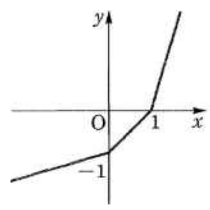


①


②


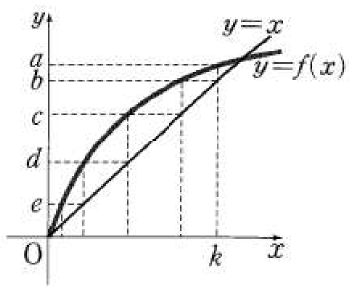
③


④


⑤


75. $x\geqq 0$에서 정의된 함수 $y=f(x)$와 $y=x$의 그래프가 오른쪽 그림과 같
$f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $(g\circ g)(k)$의 값은?

① a ② b ③ c
④ d ⑤ e



76. 함수 $f(x)=x^2+2x\quad(x\geqq -1)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프와
그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표가 (a,b), (c,d)일 때,
상수 a,b,c,d의 합 $a+b+c+d$의 값을 구하시오.

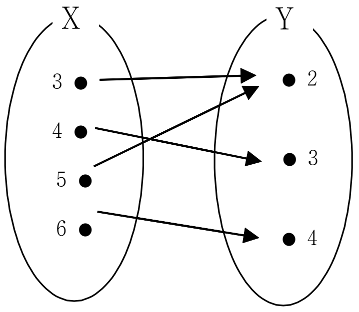
정답 및 풀이

1) 정답 대응

2) 정답 $x \to y$

3) 정답 $2,3,4$

4) 정답



5) 정답 함수

6) 정답 $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$

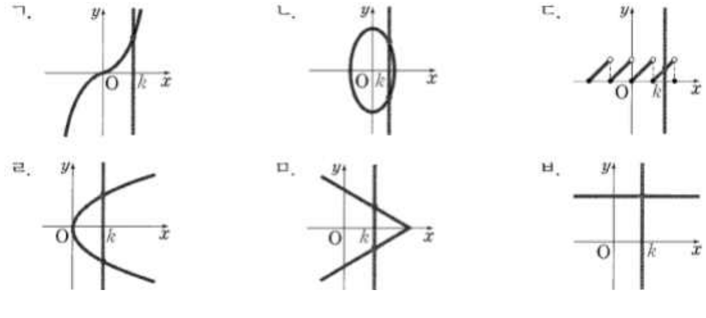
7) 정답 정의역, 공역

8) 정답 (1) $\{2,3,4\}$ (2) 공역: $\{5,6,7,8\}$

9) 정답 8 개

10) 정답 ㄱ, ㄴ
ㄷ. 정의역의 원소 4에 대응하는 공역의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
ㄹ. 정의역의 원소 4에 공역의 두 원소 c, d가 대응하므로 함수가 아니다.
따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

11) 정답 ㄱ, ㄷ, ㅂ
주어진 각 그래프 위에 직선 $x=k$(k는 상수)를 그어 교점이 1개인 것을 찾는다.



12) 정답 ㄱ, ㄷ
ㄴ. $x=3$일 때, $y=\frac{8}{3} \notin Y$이므로 함수가 아니다.
ㄹ. $x=3$일 때, $y=3^2=9 \notin Y$
$x=4$일 때, $y=4^2=16 \notin Y$
이므로 함수가 아니다.
따라서, X에서 Y로의 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

13) 정답 ④

14) 정답 (1) 정의역$\{0,1,2\}$, 공역$\{-3,-1,1,3\}$ (2) 64 (3) 2

15) 정답 (1) 6 (2) 27

16) 정답 ①, ④

17) 정답 정의역$\{1,2,3\}$, 공역 $\{1,2,3,4,\cdots\}$

18) 정답 (1) -11 (2) -3 (3) $\frac{3}{2}$

19) 정답 ③, ④

20) 정답 -1

21) 정답 6

22) 정답 1

23) 정답 (1)$\{0,1,2\}$ (2) $\{1,3,4,5,7\}$ (3) $\{1,4,7\}$

24) 정답 ④

25) 정답 (1) $y=3x$ (2) $\{6,9,12\}$

26) 정답 $\{-4,-8,12,16\}$

27) 정답 풀이참조
(1) 정의역 : $\{x \mid x \neq 0$인 모든 실수$\}$
치역 : $\{y \mid y \neq 0$인 모든 실수$\}$
(2) 정의역 : $\{x \mid x$는 모든 실수$\}$
치역 : $\{y \mid y$는 모든 실수$\}$
(3) 정의역 : $\{x \mid x$는 모든 실수$\}$

치역 : $\{y|y \geq -1$인 실수$\}$
(2) 정의역 : $\{x|x$는 모든 실수$\}$
치역 : $\{y|y \geq 0$인 실수$\}$

28) 정답 $\{y|1 \leq y \leq 7\}$
$-1 \leq x \leq 2$이므로 $1 \leq 2x+3 \leq 7$
따라서 치역은 $\{y|1 \leq y \leq 7\}$이다.

29) 정답 $\{1, 2, 3, 4\}$
$2x+1=3$일 때, $\therefore x=1$
$2x+1=5$일 때, $\therefore x=2$
$2x+1=7$일 때, $\therefore x=3$
$2x+1=9$일 때, $\therefore x=4$
따라서, 정의역은 $\{1, 2, 3, 4\}$이다.

30) 정답 27
집합 X의 원소 a에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 1, 2, 3중 하나이므로 3가지
그 각각에 대하여 집합 X의 원소 b에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 1, 2, 3중 하나이므로 3가지
그 각각에 대하여 집합 X의 원소 c에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 1, 2, 3중 하나이므로 3가지
따라서 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 하나씩만 대응하도록 대응시키는 방법은 $3\times3\times3=27$(가지)
따라서 구하는 함수의 개수는 27이다.

31) 정답 -6

32) 정답 7
집합 X의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이어야 하므로
$x^3=2x^2+3x$
$x(x^2-2x-3)=0$, $x(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$
즉, 집합 X는 집합 $\{-1, 0, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합이다. 따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^3-1=7$

33) 정답 일대일 대응은 ㄱ, ㄷ, ㄹ, 항등함수는 ㄱ, 상수함수는 ㄴ이다.

34) 정답 일대일 대응 : ㄱ, ㄴ, 항등함수 : ㄱ

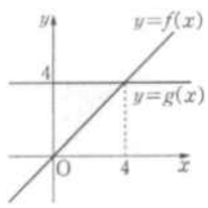
35) 정답 (1) ㄴ, ㄷ (2) ㄴ (3) ㄱ
(1) 정의역과 공역이 같고 정의역의 서로 다른 원소에 대응하는 함숫값이 다르므로 ㄴ, ㄷ이 일대일 대응이다.
(2) 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=x$이어야 하므로 항등함수인 것은 ㄴ이다.
(3) 상수함수는 함숫값이 일정하므로 ㄱ이다.

36) 정답 ③
치역과 공역이 같고, 치역의 각 원소 a에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=a$와 오직 한 점에서 만나야 하므로 일대일 대응의 그래프인 것은 ③이다.

37) 정답 21
$p=3\times3\times3=27$. $q=3\times2\times1=6$ 이므로 $p-q=21$

38) 정답 ②
ㄱ. 정의역과 공역이 같고, $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$ 이므로 f 는 항등함수이다.
ㄴ. $g(1)=1$, $g(2)=1$, $g(3)=1$이므로 g는 상수함수이다.
ㄷ. 일대일 대응인 것은 f, h의 2개이다.

39) 정답 8
f는 항등함수이므로 $f(x)=x$
g는 상수함수이고 $g(1)=4$이므로 $g(x)=4$
따라서 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 함수
$y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times4=8$



40) 정답 $pq=4$ 또는 $pq=-4$
함수 $f(x)=px+q$가 일대일 대응이면 증가함수이거나 감소함수이다.
i) $f(x)=px+q$가 증가함수이면 그 그래프의 기울기 p는 $p>0$이어야 하므로 주어진 정의역과 공역에서 일대일 대응인 함수 $f(x)$의 그래프는 $f(-1)=0$, $f(1)=4$ 이어야 한다.
$f(-1)=-p+q=0$ ……㉠
$f(1)=p+q=4$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $p=2$, $q=2$ $\therefore pq=4$

ii) $f(x)=px+q$가 감소함수이면 그래프의 기울기 p는 $p<0$이어야 하므로 주어진 정의역과 공역에서 일대일 대응인 함수 $f(x)$의 그래프는 $f(-1)=4$, $f(1)=0$ 이어야 한다.
$f(-1)=-p+q=4$ ……㉢
$f(1)=p+q=0$ ……㉣
㉢, ㉣에서
$p=-2$, $q=2$ $\therefore pq=-4$
그러므로 pq의 값은 4 또는 -4이다.

41) 정답 $a<2$

주어진 함수가 일대일 대응이 되려면 (치역)=(공역)이고, 정의역의 각 원소에 대응하는 함숫값이 서로 달라야 하므로 일대일 대응인 함수는 증가함수 또는 감소함수이다. 그런데 $x \geqq 0$일 때 $f(x)=2x+1$은 x값이 증가할 때 y의 값이 증가하는 형태로 기울기가 양수이므로 $x<0$일 때도 $f(x)=(2-a)x+1$의 그래프의 기울기가 양수이어야 한다. 따라서 $2-a>0$에서 $a<2$

42) 정답 (1) 4 (2) 3
(1) $(g \circ f)(1)=g(f(1))=g(5)=4$
(2) $(f \circ g)(5)=f(g(5))=f(4)=3$

43) 정답 (1) $6x-1$ (2) $6x+2$ (3) $4x+3$ (4) $9x-4$ (5) 5 (6) 8
$f(x)=2x+1, g(x)=3x-1$이므로
(1) $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(3x-1)$
$=2(3x-1)+1=6x-1$
(2) $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)$
$=3(2x+1)-1=6x+2$
(3) $(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(2x+1)$
$=2(2x+1)+1=4x+3$
(4) $(g \circ g)(x)=g(g(x))=g(3x-1)$
$=3(3x-1)-1=9x-4$
(5) $(f \circ g)(1)=f(g(1))=f(2)$
$=2 \cdot 2+1=5$
(6) $(g \circ f)(1)=g(f(1))=g(3)$
$=3 \cdot 3-1=8$

44) 정답 (1) $-4x^2+4x+1$, (2) $-4x^2+4x+1$, (3) 1, (4) 1
(1) $(h \circ g)(x)$를 구하면
$(h \circ g)(x)=h(g(x))=h(-2x+3)$
$=-(-2x+3)^2+2$
$=-4x^2+12-7$ ……… ㉠
$\therefore ((h \circ g) \circ f)(x)=(h \circ g)(f(x))$
$=(h \circ g)(x+1)=-4(x+1)^2+12(x+1)-7$ ($\because$㉠)
$=-4x^2+4x+1$
(2) $(g \circ f)(x)$를 구하면
$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)$
$=-2(x+1)+3=-2x+1$ ……… ㉠
$\therefore (h \circ (g \circ f))(x)=h((g \circ f)(x))$
$=h(-2x+1)$ ($\because$㉠)
$=-(-2x+1)^2+2=-4x^2+4x+1$
(3) $((h \circ g) \circ f)(1)=(h \circ g)(f(1))$
$=(h \circ g)(2)=-4 \cdot 2^2+12 \cdot 2-7=1$
(4) $(h \circ (g \circ f))(1)=h((g \circ f)(1))$
$=h(-2 \cdot 1+1)=h(-1)=-(-1)^2+2=1$

45) 정답 2
$(f \circ f)(x)=f(f(x))$
$=f(4x-3)$
$=4(4x-3)-3$
$=16x-15$
이므로 $(f \circ f)(a)=17$에서
$16a-15=17$ $\therefore a=2$

46) 정답 2
$f(2)=-1$, $f(-1)=2$ 이므로
$(f \circ f \circ f \circ f)(2)=(f \circ f \circ f)(-1)$
$=(f \circ f)(2)$
$=f(-1)=2$

47) 정답 1
$(f \circ g)(a)=f(g(a))=f(a^2+a-1)$
$=3(a^2+a-1)-1=3a^2+3a-4$
따라서 $3a^2+3a-4=2$이므로 $a^2+a-2=0$
$(a+2)(a-1)=0$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=1$
그런데 $a>0$이므로 $a=1$

48) 정답 0
$\sqrt{3}$ 은 무리수이므로 $f(\sqrt{3})=1$
1은 유리수이므로
$(f \circ f)(\sqrt{3})=f(f(\sqrt{3}))=f(1)=0$

49) 정답 7
$(g \circ f)(x)=g(f(x))$이므로 $f(x)=1$에서
$\frac{x}{2}-1=1$, $\frac{x}{2}=2$ $\therefore x=4$
이 때, $(g \circ f)(4)=7$이므로 $g(f(4))=g(1)=7$

50) 정답 (1) $h(x)=3x+3$ (2) $h(x)=3x+12$
(1) $(f \circ h)(x)=f(h(x))$이므로 $(f \circ h)(x)$는
$(f \circ h)(x)=f(h(x))$
$=2h(x)-3$ ($\because$ $f(x)=2x-3$)
$(f \circ h)(x)=2h(x)-3$과 $g(x)=6x+3$을 주어진 식에 대입하면
$2h(x)-3=6x+3$
$\therefore$ $h(x)=3x+3$
(2) $(h \circ f)(x)=h(f(x))$이므로 $(h \circ f)(x)$는
$(h \circ f)(x)=h(f(x))=h(2x-3)$
$(h \circ f)(x)=h(2x-3)$과 $g(x)=6x+3$을 주어진 식에 대입하면
$h(2x-3)=6x+3$ …… ㉠
$2x-3=t$로 놓으면
$2x=t+3$ $\therefore$ $x=\frac{t+3}{2}$

이를 ㉠에 대입하면

$h(t)=6\cdot\dfrac{t+3}{2}+3$

$\therefore\ h(t)=3t+12$

t대신 x를 대입하여 $h(x)$를 구하면

$h(x)=3x+12$

51) 정답 풀이참조

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(2x-1)$

$=(2x-1)^2+1$

$=4x^2-4x+2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(x^2+1)$

$=2(x^2+1)-1$

$=2x^2+1$

$\therefore f\circ g\neq g\circ f$

52) 정답 $-\dfrac{1}{2}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+a)$

$=-(2x+a)+1=-2x-a+1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+1)$

$=2(-x+1)+a=-2x+2+a$

이 때, $g\circ f=f\circ g$이므로

$-2x-a+1=-2x+a$

$2a=-1$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{2}$

53) 정답 2

$(f\circ g)(x)$와 $(g\circ f)(x)$를 각각 구하면

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx-a)$

$=a(bx-a)-b$

$=abx-(b+a^2)$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax-b)$

$=b(ax-b)-a$

$=abx-(a+b^2)$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$abx-(b+a^2)=abx-(a+b^2)$

$b+a^2=a+b^2$

$(a^2-b^2)-(a-b)=0$

$(a-b)(a+b-1)=0$

이 때, $a\neq b$이므로

$a+b-1=0\quad\therefore\ a+b=1\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\therefore\ f(3)+g(3)=(3a-b)+(3b-a)$

$=2a+2b$

$=2(a+b)=2$ ($\because$ ㉠)

54) 정답 풀이참조

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(x^2)-1=2x^2-1$

$\therefore ((f\circ g)\circ h)(x)=2(h(x))^2-1$

$=2(-2x)^2-1$

$=8x^2-1$

$(g\circ h)(x)=g(h(x))=(-2x)^2=4x^2$

$\therefore\ (f\circ(g\circ h))(x)=f(4x^2)=2(4x^2)-1=8x^2-1$

$\therefore\ (f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$

55) 정답 7

$f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=x^2-1$에서 $\dfrac{x-1}{x+1}=t$로 놓으면

$x-1=t(x+1),\ (1-t)x=t+1$

$\therefore\ x=\dfrac{1+t}{1-t}$

이를 $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=x^2-1$에 대입하면

$f(t)=\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)^2-1$

$\therefore\ f(-1)=-1,\ f(2)=8$

$\therefore f(-1)+f(2)=7$

[다른 풀이]

$\dfrac{x-1}{x+1}=-1$로 놓으면

$x-1=-x-1\quad\therefore\ x=0$

이를 $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=x^2-1$에 대입하면

$f(-1)=0^2-1=-1$

또, $\dfrac{x-1}{x+1}=2$로 놓으면

$x-1=2x+2\quad\therefore\ x=-3$

이를 $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=x^2-1$에 대입하면

$f(2)=(-3)^2-1=8$

$\therefore\ f(-1)+f(2)=-1+8=7$

56) 정답 $8x-1$

$f\left(\dfrac{x+3}{2}\right)=2x+1$에서 $\dfrac{x+3}{2}=t$로 놓으면

$x=2t-3$

이를 $f\left(\dfrac{x+3}{2}\right)=2x+1$에 대입하면

$f(t)=2(2t-3)+1$

$\therefore\ f(t)=4t-5$

이 때, t 대신 $2x+1$을 대입하면

$f(2x+1)=4(2x+1)-5=8x-1$

57) 정답 26

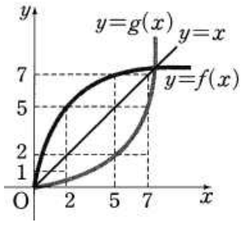
$(f\circ f\circ f)(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$(f\circ f\circ f)(1)=f(f(f(1)))=f(f(2))=f(5)$

$=51=26$

58) 정답 5

$y=x$의 그래프를 이용하여 x축과 점선이 만나는 점의 x좌표를 구하여 표시하면



위의 그래프를 이용하여 $(g \circ f)(5)$의 값을 구하면

$(g \circ f)(5)=g(f(5))$

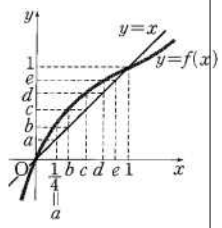
$f(5)=7$ 이므로

$=g(7)$

$=5$

59) 정답 ⑤

$y=x$의 그래프를 이용하여 x축과 점선이 만나는 점의 x좌표를 구하여 표시하면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore\ f^4\left(\frac{1}{4}\right)$

$=f^3\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$

$=f^3(b)\ \left(\because\ f\left(\frac{1}{4}\right)=b\right)$

$=f^2(f(b))$

$=f^2(c)\ (\because\ f(b)=c)$

$=f(f(c))$

$=f(d)\ (\because\ f(c)=d)$

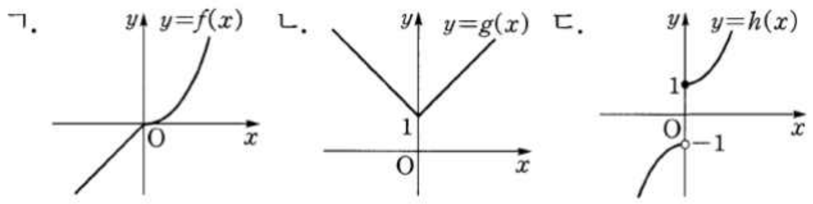
$=e$

60) 정답 ㄱ, ㄷ

역함수가 존재하려면 함수가 일대일 대응이어야 한다. 따라서 일대일 대응인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

61) 정답 ①

함수 f, g, h의 그래프가 다음과 같다.



따라서 집합 R에서 R로의 일대일 대응인 것은 f이므로 역함수가 존재하는 것은 ㄱ뿐이다.

62) 정답 (1) 1 (2) 3 (3) 1 (4) 3

(1) $f(2)$는 X의 원소 2에 대응하는 y의 값이므로 1이다.

(2) $f^{-1}(2)$는 Y의 원소 2에 대응하는 x의 값이므로 3이다.

(3) $(f^{-1} \circ f)(1)=f^{-1}(f(1))=f^{-1}(3)=1$

(4) $(f \circ f^{-1})(3)=f(f^{-1}(3))=f(1)=3$

63) 정답 (1) $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ (2) $y=\sqrt{x}\ (x \geq 0)$

(1) 함수 $y=2x+3$은 실수 전체의 집합에서 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=2x+3$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

(2) 함수 $y=x^2$은 $x \geq 0$인 범위에서 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

또, $y=x^2$은 $x \geq 0$에서 $y \geq 0$이다.

$y=x^2$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면 $x \geq 0$이므로

$x=\sqrt{y}\ (y \geq 0)$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\sqrt{x}\ (x \geq 0)$

64) 정답 (1) $a=0$, $b=1$ (2) 10

(1) $f^{-1}(4)=2$에서 역함수의 정의에 의해 $f(2)=4$

이를 $f(x)=2x+a$에 대입하면

$f(2)=2 \cdot 2+a=4 \qquad \therefore a=0$

또, $g(1)=5$이므로

$g(1)=1+b+3=5 \qquad \therefore b=1$

(2) 함수 f의 역함수가 g이므로 $g(8)=k$ (k는 상수0라 하면

$g(8)=k \ \Leftrightarrow\ f(k)=8$

$\therefore f(k)=5k-2=8 \qquad \therefore k=2$

$\therefore g(8)=2$

$f^{-1}=g$이므로 $g^{-1}=f$

따라서 $g^{-1}(2)$의 값은

$g^{-1}(2)=f(2)=5 \cdot 2-2=8$

$\therefore g(8)+g^{-1}(2)=2+8=10$

65) 정답 1

$g^{-1}(1)=2$에서 역함수의 정의에 의해 $g(2)=1$

이를 $g(x)=x+a$에 대입하면

$g(2)=2+a=1 \ \ \therefore a=-1$

$g(x)=x-1$이므로 $\qquad g(3)=3-1=2$

이 때, $f(x)=ax+1$이므로

$f(x)=-x+1$

$f^{-1}(2)=t$ (t는 상수)라 하면

$f(t)=2,\ -t+1=2$

$\therefore t=-1$

$\therefore f^{-1}(2)+g(3)=-1+2=1$

66) 정답 0

함수 $f(x)=x+a$는 실수 전체의 집합에서 일대일

대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=x+a$로 놓고 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$x=y-a$
x와 y를 서로 바꾸면 역함수는
$f^{-1}(x)=x-a$
이 때, $x+a=x-a$이므로
$a=0$

67) 정답 $\frac{1}{4}$
함수 $y=2x-1$의 역함수가 $y=ax+b$이다.
$y=2x-1$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$
x와 y를 서로 바꾸면 역함수는
$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
이 때, $ax+b=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$이므로
$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$
$\therefore ab=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

68) 정답 ②
ㄱ. 일반적으로 합성함수의 교환법칙은 성립하지 않는다. (거짓)
ㄷ. $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$ (거짓)
따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

69) 정답 0
$(f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(3)=(f\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(3)$
$=(f\circ g^{-1}\circ I)(3)$
$=(f\circ g^{-1})(3)$
$=f(g^{-1}(3))$
$g^{-1}(3)=a$라 하면, $g(a)=3$이므로
$3a-3=3$
$\therefore a=2$
$\therefore f(g^{-1}(3))=f(2)=0$

70) 정답 4
$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$이므로 주어진 식을 변형하면
$(f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(k)=4$
$(f\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(k)=4$
$f^{-1}\circ f=I$이므로
$(f\circ g^{-1}\circ I)(k)=4$
$\therefore (f\circ g^{-1})(k)=4$ $\cdots$ ㉠
$g^{-1}(k)=a$ (a는 상수)라 하면
$g(a)=a^2=k$ $\therefore a=\pm\sqrt{k}$
$\therefore g^{-1}(k)=\pm\sqrt{k}$
이를 ㉠에 대입하면
$(f\circ g^{-1})(k)=4$, $f(g^{-1}(k))=4$
$\therefore f(\pm\sqrt{k})=4$
$f(\pm\sqrt{k})=4$에서 k의 값을 구하면
$\pm2\sqrt{k}=4$, $4k=16$ $\therefore k=4$

71) 정답 $h(x)=\frac{3}{2}x+1$
함수 $f(x)=2x+3$의 역함수가 존재하므로 $f\circ h=g$에서
$h=f^{-1}\circ g$
$y=2x+3$으로 놓으면 $2x=y-3$ $\therefore x=\frac{y-3}{2}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x-3}{2}$
따라서 $f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$이므로
$h(x)=(f^{-1}\circ g)(x)=f^{-1}(g(x))=f^{-1}(3x+5)$
$=\frac{(3x+5)-3}{2}=\frac{3}{2}x+1$

[다른 풀이] $f\circ h=g$에서 $f(h(x))=g(x)$
$2h(x)+3=3x+5$, $2h(x)=3x+2$
$\therefore h(x)=\frac{3}{2}x+1$

72) 정답 0
$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$이므로
$h(x)=(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=(g\circ f)^{-1}(x)$
$(g\circ f)(x)$를 구하면
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x)=2x+2$
$h(2)=(g\circ f)^{-1}(2)$에서 $(g\circ f)^{-1}(2)=k$ (k는 상수)라 하면
역함수의 정의에 의해
$(g\circ f)(k)=2$
$(g\circ f)(k)=2k+2=2$ $\therefore k=0$
$\therefore h(2)=(g\circ f)^{-1}(2)=k=0$

73) 정답 1
$(f\circ f)(2)=a$에서 $f(f(2))=a$이므로
$f^{-1}(a)=f(2)=1$

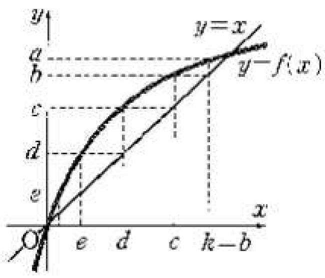
[다른 풀이] 주어진 그래프에서
$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(1)=0$ $\therefore a=0$
$f^{-1}(0)=k$라 하면 $f(k)=0$ 이므로 주어진 그래프에서 $k=1$

74) 정답 ③
함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 직선

$y=x$에 대하여 대칭이동한 것이므로 옳은 것은 ③이다.

75) 정답 ④

$y=x$의 그래프를 이용하여 x축과 점선 이 만나는 점의 좌표를 구하여 표시하면 오른쪽 그림과 같다.



이 때, $k=b$이므로

$g(b)=p$ (p는 상수) 라 하면

$f(p)=b$

$(\because f^{-1}=g \Leftrightarrow f=g^{-1})$

$f(p)=b$를 만족하는 p의 값은 $p=c$

$\therefore g(b)=c$

$\therefore (g\circ g)(k)=g(g(b))$
$=g(c)$

$g(c)=q$ (q는 상수)라 하면

$f(q)=c$ $(\because f^{-1}=g \Leftrightarrow f=g^{-1})$

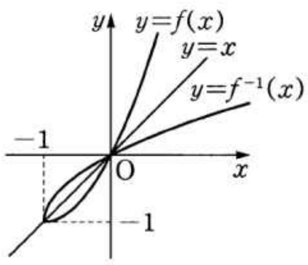
$f(q)=c$를 만족하는 q의 값은

$q=d$ $\quad\therefore g(c)=d$

$\therefore (g\circ g)(k)=d$

76) 정답 -2

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수가 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $(-1,\ -1)$, $(0,\ 0)$ 이므로 $a+b+c+d=-2$